

**CONCOURS INTERNE**  
**D'INGÉNIEUR TERRITORIAL**  
**SESSION 2019**

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES**

Durée : 4 heures  
Coefficient : 3

**Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.**

**Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, en indiquant bien le numéro de chaque question.**

**Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.**

**À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :**

- ♦ Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni initiales, ni votre numéro de convocation, ni le nom de votre collectivité employeur, de la commune où vous résidez ou du lieu de la salle d'examen où vous composez, ni nom de collectivité fictif non indiqué dans le sujet, ni signature ou paraphe.
- ♦ Sauf consignes particulières figurant dans le sujet, vous devez impérativement utiliser une seule et même couleur non effaçable pour écrire et/ou souligner. Seule l'encre noire ou l'encre bleue est autorisée. L'utilisation de plus d'une couleur, d'une couleur non autorisée, d'un surligneur pourra être considérée comme un signe distinctif.
- ♦ Les graphiques pourront être réalisés au crayon à papier.
- ♦ L'utilisation d'une calculatrice autonome et sans imprimante est autorisée.
- ♦ Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.

Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

**Ce sujet comprend 10 pages.**  
**Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend**  
**le nombre de pages indiqué.**

*S'il est incomplet, en avertir le surveillant.*

## MATHÉMATIQUES : 10 points

### PROBLÈME 1 (3,5 points)

Un entrepreneur de travaux publique propose trois formules d'enrobé à chaud à ses clients collectivités territoriales. L' enrobé de base (ERB) l' enrobé bordé d'un trottoir (ERT) et la formule comprenant une piste cyclable (ERC).

Pour chaque formule le tableau ci-dessous indique le temps en heure, nécessaire à la pose de l'enrobé et les coûts brut et prix de vente exprimés en  $10^4$  euros et ce pour 1 km.

	ERT	ERC	ERB
coût brut	3	4	2
temps requis	8	10	6
prix de vente	12	16	10

#### Question 1 (2 points)

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$  et la matrice  $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$ .

**1.a.** Effectuer le produit matriciel MC.

**1.b.** Si pour la matrice C ,10 correspond à 10 Km d'ERT et 8 à 8 Km d'ERC et enfin 14 à 14 Km d'ERB, donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC. Vous exprimerez les sommes en euros sans puissance de 10 et les temps en jours travaillés - sachant qu'une journée travaillée dure 8 heures.

#### Question 2 (1,5 point)

On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$  et l'on admet que  $PM=I$ , I matrice unité.

Soit X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes .

**2.a.** Démontrer que si  $MX = Y$  alors  $X = PY$ .

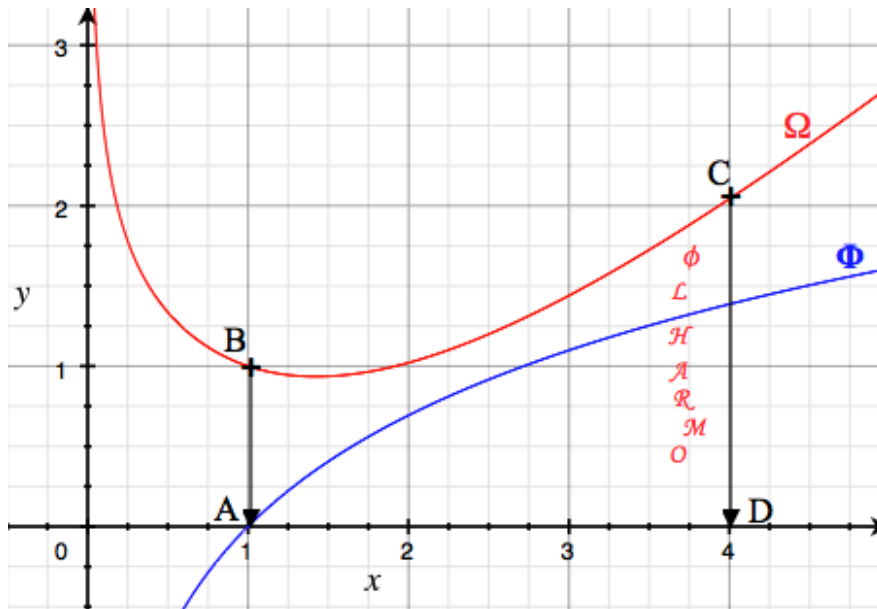
**2.b.** On sait que l'entreprise de TP à réalisée une recette de 4 300 000 € sur un temps travaillé de 270 heures et avec un coût de un million d'euros.

Construire la matrice Y à partir de ces données, puis déterminer pour chaque types d'enrobage le nombre de kilomètres réalisés.

## PROBLÈME 2 (3 points)

Une salle philharmonique est vue de profil. La figure ABCD représente un mur de cette salle dans un repère orthonormé d'unité un pour vingt cinq mètres.

On considère la courbe  $\Omega$  d'équation  $y=f(x)$  avec :  $f(x)=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\ln(x)$  et la courbe  $\Phi$  d'équation  $y=\ln(x)$ .



### Question 1 (1 point)

On pose  $u = \int_1^4 \ln(x) dx$ , donner une interprétation graphique de  $u$  et calculer ce réel  $u$  en intégrant par parties. Donner le résultat en unités d'aire à  $10^{-2}$  près par défaut.

### Question 2 (1 point)

2.a Calculer  $w = \int_1^4 \left(x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx$  pour la suite on admettra que  $w = 6,44$  unités d'aire.

2.b Par linéarité de l'intégration on en déduit  $\int_1^4 f(x) dx = w - u$ . soit  $A_1$  l'aire concernant la portion de plan délimité par  $\Omega$ , l'axe des abscisses et la bande  $1 \leq x \leq 4$ .  
On donnera une valeur approchée, en unités d'aire, à  $10^{-2}$  près.

### Question 3 (1 point)

3.a Considérons l'aire  $A_2$  définie par  $A_2 = A_1 - u$

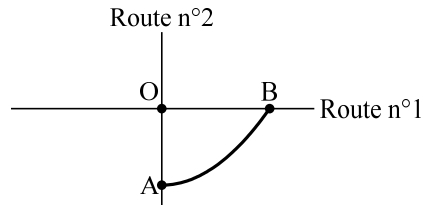
Calculer  $A_2$  en unité d'aire puis donner le résultat en  $m^2$ .

3.b Une peinture à un pouvoir couvrant de 1 litre pour  $10 m^2$ ; 850 litres de peinture seront-ils suffisants pour recouvrir le mur délimité par l'aire  $A_1$ ? justifier.

### PROBLÈME 3 (3,5 points)

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Deux routes se croisent perpendiculairement. Un chemin piétonnier mène d'une route à l'autre selon le schéma suivant :



On choisit le repère d'origine O, le croisement des deux routes, d'axe des abscisses la route n°1, d'axe des ordonnées la route n°2. L'unité de longueur étant le kilomètre, le point A a pour coordonnées  $(0 ; -1)$  et le point B a une abscisse positive et une ordonnée nulle.

Dans ce repère, le chemin piétonnier reliant A et B est un arc de la parabole  $P$  représentative de la fonction  $f(x) = 0,5x^2 - 1$ .

#### Partie A, longueur du chemin piétonnier (2,25 points)

On rappelle que la longueur  $L$  du chemin piétonnier est donnée, en unités de longueur, par l'intégrale :

$$L = \int_{\text{abscisse de A}}^{\text{abscisse de B}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

où  $f'$  est la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

1. Montrer que  $L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2} dx$ .

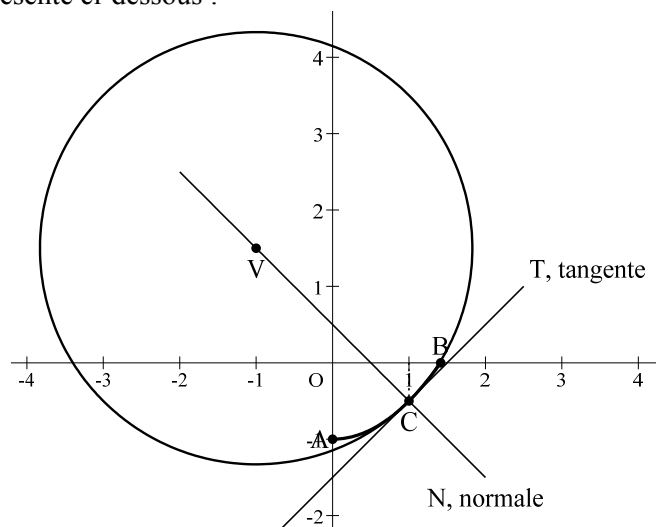
2. Montrer qu'une primitive, sur  $\mathbb{R}$ , de la fonction  $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$  est :

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right).$$

3. Calculer alors la longueur de ce chemin piétonnier ; la réponse finale sera arrondie au mètre près.

#### Partie B, un cercle de courbure ou cercle osculateur (2,25 points)

On s'intéresse au cercle de courbure  $\Gamma$  de la parabole  $P$  au point C d'abscisse 1 du chemin piétonnier, cercle de centre V représenté ci-dessous :



1. On rappelle que le rayon de courbure, rayon du cercle de courbure, de la parabole  $P$  en son point d'abscisse  $x$  est donné par :

$$R = \frac{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

où  $f''$  est la dérivée seconde de la fonction  $f$ .

Montrer que le rayon du cercle  $\Gamma$  est de  $\sqrt{8}$ .

2. Déterminer des équations de la tangente  $T$  et de la normale  $N$  à la parabole  $P$  au point  $C$ .  
On rappelle que  $T$  et  $N$  se croisent perpendiculairement au point  $C$ .

3. Calculer les coordonnées du point  $V$ .

## PHYSIQUE : 10 points

### PREMIERE PARTIE : ISOLATION THERMIQUE (3 points)

Dans le cadre de la rénovation de sa piscine (composée d'un grand bassin et d'un bassin ludique ainsi que d'un ensemble de douches, entre autres), une collectivité décide de se mettre en accord avec la réglementation thermique RT 2020 des bâtiments à énergie positive.

Les normes de la RT 2020 sont très précises :

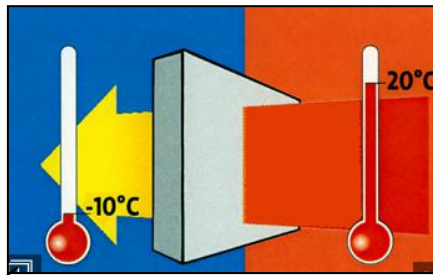
- consommation de chauffage n'excedant pas 12 kWh<sub>ep</sub> par m<sup>2</sup> et par an, grâce à une isolation performante, une ventilation efficace et une conception bioclimatique satisfaisante ;
- consommation totale d'énergie primaire (c'est-à-dire le chauffage, l'eau chaude sanitaire, l'éclairage et les appareils électriques) inférieure à 100 kWh par m<sup>2</sup> et par an ;
- production d'énergie renouvelable couvrant les besoins énergétiques de la structure (bilan passif) ou les surpassant (bilan positif).

Initialement, un mur de béton, sans ouverture (coté nord) séparait deux milieux. La température du milieu intérieur est de 20 °C. La température du milieu extérieur est de -10°C. Pour renforcer thermiquement cette paroi, on est amené à placer des matériaux isolants, côté intérieur ou côté extérieur. L'objectif de cette partie est de choisir la meilleure solution.

#### -cas n°1 : isolation intérieure :

De l'intérieur vers l'extérieur les matériaux sont les suivants :

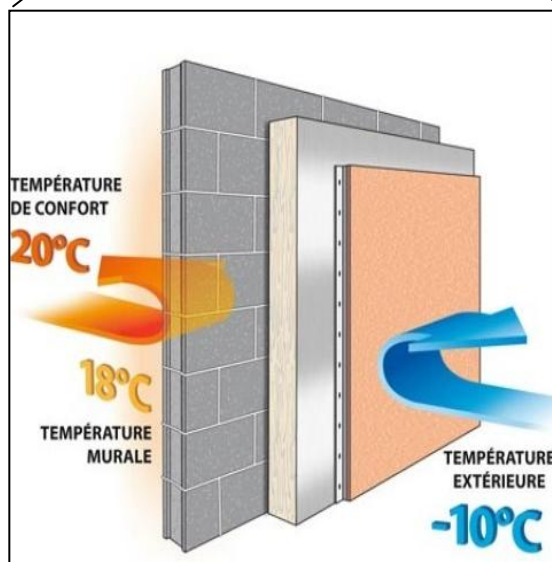
- plâtre cartonné hydrofuge d'épaisseur 1 cm et de conductivité thermique égale à  $0,70 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- polystyrène d'épaisseur 5 cm et de conductivité thermique égale à  $0,036 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- béton d'épaisseur 20 cm et de conductivité thermique égale à  $1,4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$



#### -cas n°2 : isolation extérieure :

De l'intérieur vers l'extérieur les matériaux sont les suivants :

- béton d'épaisseur 20 cm et de conductivité thermique égale à  $1,4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- polystyrène d'épaisseur 5 cm et de conductivité thermique égale à  $0,036 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- enduit ciment projeté de 1,5 cm d'épaisseur et de conductivité thermique égale à  $1,15 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$



*Schéma illustrant l'isolation par l'extérieur*

1- Calculer la résistance thermique de chaque type d'isolation et le coefficient de transmission thermique.

On donne : - résistance superficielle interne :  $0,11 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$   
- résistance superficielle externe  $0,06 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Vous dresserez les résultats obtenus dans un tableau.

2- Calculer les températures des différentes faces du mur et de son isolation dans les deux cas.

3- Analyser les résultats précédents. Quelles constatations pouvez-vous faire ?

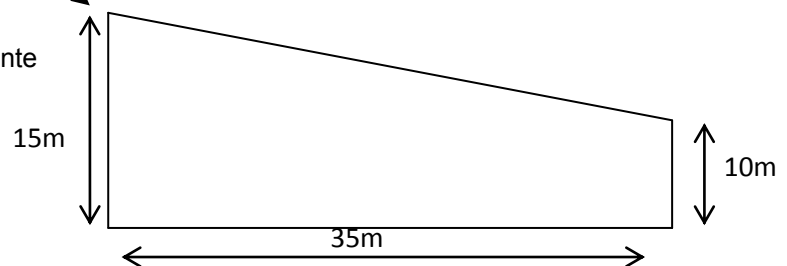
4- Quel type d'isolation convient le mieux dans les différents cas suivants :

- Amélioration de l'inertie thermique.
- Diminution des risques de condensation dans le mur en béton.



Grand bassin

Façade rénovée assimilée à la figure suivante



Le prix moyen du kW.h est estimé à  $0,13\text{€ HT}$ . La façade est assimilée à un trapèze de 35m de long sur deux hauteurs de 15m et 10m. Il y a deux façades à rénover. Selon l'Agence nationale de l'habitat, (ANAH) le coût moyen des travaux d'**isolation extérieure** pour les murs est compris entre **40 et 80 euros HT par m<sup>2</sup>** fourniture et pose comprises. On se placera dans la fourchette **moyenne**. On considère une période hivernale allant du 1<sup>er</sup> décembre au 28 février.

5- Calculer :

5-1 les déperditions thermiques (en W)

5-2 l'énergie perdue pour la période considérée et le coût (HT) de celle-ci.

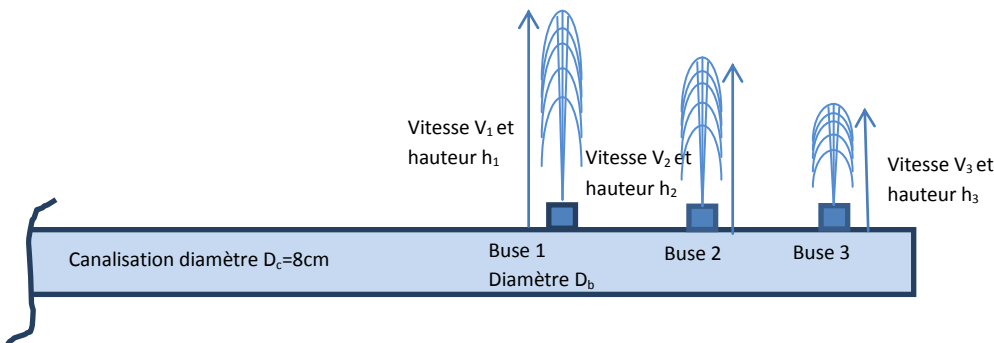
6- Conclure sur le choix de l'isolation au regard du critère économique, c'est-à-dire sur la rentabilité d'une telle rénovation.

## DEUXIEME PARTIE : JETS HYDRAULIQUES (4 points)

L'objectif de cette partie est de dimensionner la pompe hydraulique 2 permettant de réacheminer l'eau d'un bassin (ludique) à un autre (grand bassin) suite aux 3 jets d'eau réalisés sur le petit bassin ludique.



Bassin ludique

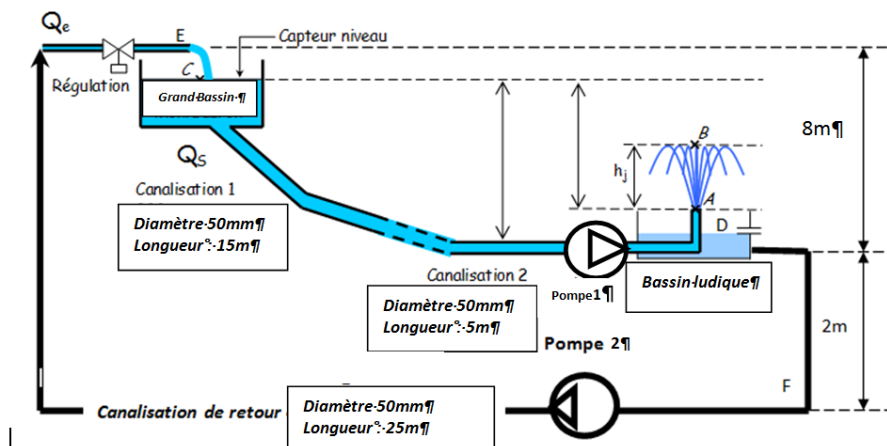


Les 3 jets d'eau atteignent des hauteurs différentes ( $h_1=9\text{m}$ ,  $h_2=5\text{m}$  et  $h_3=3\text{m}$ ), considérés comme parfaitement verticaux (pour simplifier nos calculs). L'ensemble est alimenté par une électropompe 1 triphasée banchée sur le réseau (400V-50Hz), de facteur de puissance 0,85 et de rendement optimal 88%. On considère un fonctionnement en ce point nominal et l'intensité du courant absorbé par cette électropompe est de 15A. Elle fournit une pression de 5 bars. On néglige les pertes de charge et les frottements sur toute la canalisation (canalisations 1 et 2). On néglige la résistance de l'air. La canalisation ainsi que les 3 buses ont une forme parfaitement cylindrique.

- 1- Calculer les 3 vitesses à la base des buses :  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$
- 2- Calculer le débit volumique (supposé constant) de la pompe en l/mn (litres par minute)
- 3- En déduire le diamètre des buses que l'on considèrera comme identiques.

L'eau du bassin ludique est ensuite renvoyée par l'intermédiaire d'une électropompe 2 hydraulique (eau en circuit fermé) vers le grand bassin dont le débit est imposé par les contraintes de fonctionnement à :

$$Q_e = 1.5 \text{ l/s.}$$





4- En prenant le point D à la surface de l'eau le plus défavorable, c'est-à-dire avec un bassin ludique presque vide, et le point E en sortie de la canalisation de retour (à l'air libre), calculer les vitesses en entrée et en sortie de la canalisation de retour en supposant un débit constant et conservé et un diamètre constant sur toute sa longueur.

5- Calculer alors la puissance de la pompe nécessaire pour acheminer l'eau jusqu'au grand bassin en prenant en compte les pertes de charges totales  $J$  du circuit hydraulique (canalisation de retour) que l'on prend égales à  $3 \text{ J.kg}^{-1}$ .

Données complémentaires :

- On rappelle que la masse volumique de l'eau  $\rho_{\text{eau}}$  est égale à  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .
- On adoptera comme valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .
- La pression atmosphérique notée  $p_{\text{atm}}$  sera prise égale à  $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .
- Le fluide est considéré comme incompressible.

### **TROISIEME PARTIE : THERMODYNAMIQUE (3 points)**

Dans le cadre de la RT 2020, la collectivité opte pour le choix d'une installation d'une PAC (Pompe à Chaleur) pour le chauffage de l'eau chaude sanitaire (ECS) pour les douches de cette piscine.

Cette PAC fonctionne entre deux sources de chaleur : une rivière qui constitue la source froide et l'eau du circuit de chauffage qui constitue la source chaude.

Le fluide utilisé dans cette PAC sera de l'air assimilé à un gaz parfait (constante  $R=8,32 \text{ J/(K.mol)}$ ), capacité thermique molaire à pression constante  $C_p=29,1 \text{ J/(K.mol)}$  ; rapport des capacités thermiques molaires à pression constante  $C_p$  et à volume constant  $C_v$  :  $\gamma = C_p/C_v = 1,35$ .

Le fluide de la PAC décrit le cycle de transformations réversibles suivant :

-Passage de l'état ① à l'état ② par une compression adiabatique dans un compresseur :

Etat ① : pression  $P_1=1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  volume  $V_1$  température  $T_1=297\text{K}$

Etat ② : pression  $P_2=2,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  volume  $V_2$  température  $T_2$

-Passage de l'état ② à l'état ③ par une transformation isobare pendant laquelle l'air reçoit de la source chaude une quantité de chaleur  $Q_1$  :

Etat ③ : pression  $P_3 = P_2$  température  $T_3=342\text{K}$

-Passage de l'état ③ à l'état ④ par une détente adiabatique :

Etat ④ : pression  $P_4 = P_1$  température  $T_4$

-Passage de l'état ④ à l'état ① par une transformation isobare pendant laquelle l'air reçoit de la source froide une quantité de chaleur  $Q_2$ .

On effectuera les calculs pour une mole d'air.

1- Construire le diagramme de P,V (ou diagramme de Clapeyron), sans échelle particulière. Y placer les points ①②③ et ④. Avons-nous affaire à un cycle moteur ou résistant (justifier graphiquement votre réponse).

2- Calculer les volumes  $V_1$  et  $V_2$ .

3- Calculer les températures  $T_2$  et  $T_4$ .

4- Pour chaque cycle décrit par une mole d'air, calculer :

- Les quantités de chaleur  $Q_1$  et  $Q_2$ .
- Le travail  $W$  reçu au cours de la totalité du cycle.

L'efficacité de la pompe, notée  $\varepsilon$ , est le rapport de la quantité de chaleur reçue par la source chaude au cours d'un cycle décrit par le fluide (ici l'air), et du travail reçu par ce fluide (l'air) au cours de ce même cycle.

5- Exprimer  $\varepsilon$  en fonction de  $Q_1$  et de  $W$ . Calculer sa valeur.